## 基础课07 函数的单调性与最值

### 课时评价·提能

#### 基础巩固练

1. 下列函数中，在区间上单调递增的是（ B ）.

A. B. C. D.

[解析]对于，函数图象的对称轴为直线，则函数在,上单调递减，在,上单调递增，故 错误；

对于，在定义域 上单调递增，故 正确；

对于，，函数在 上单调递减，故 错误；

对于，当 时，是常数函数，故 错误.故选.

2. [2024·西安联考]已知函数是实数集上的减函数，则不等式的解集为（ C ）.

A. B. C. D.

[解析]因为函数 是实数集 上的减函数，且,所以，解得.故选.

3. 若，则有（ D ）.

A. 最小值3 B. 最大值3 C. 最小值9 D. 最大值9

[解析]，其图象的对称轴为直线，开口向下.

因为，所以当 时，有最大值，最大值为9，没有最小值.故选.

4. [2024·海口模拟]函数的单调递减区间是（ B ）.

A. B. 和 C. D. 和

[解析] ，则由二次函数的性质知，

当 时，的单调递减区间为；

当 时，的单调递减区间为.

故 的单调递减区间是 和.故选.

5. [2024·宁波测试]已知是定义在上的函数，则“函数在上单调递增”是“函数在上的最大值为”的（ A ）.

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

[解析]若函数 在 上单调递增，则 在 上的最大值为.

若 在 上的最大值为，则令，

因为 在,上单调递减，在,上单调递增，且，所以 在 上的最大值为，但推不出 在 上单调递增.故“函数 在 上单调递增”是“在 上的最大值为”的充分不必要条件.故选.

6. [2024·白沙调研]设函数且是上的减函数，则实数的取值范围是（ A ）.

A. , B. , C. ， D. ，

[解析] 函数,且 是 上的减函数，.故选.

7. [2024·黄冈模考]已知函数若，则的单调递增区间为（ D ）.

A. , B. , C. , D. ,

[解析]依题意得,解得，故，可知 在 ,上单调递增.故选.

8. [2024·长春摸底]已知函数满足，则（ B ）.

A. 的最小值为2 B. ,

C. 的最大值为2 D. ,

[解析]，，，，的最小值为1，无最大值，故，错误.

，，，,，故 正确.

，，，,，故 错误.故选.

#### 综合提升练

9. [2024·重庆调研]（多选题）已知函数，则下列说法正确的是（ AC ）.

A. 的定义域为

B. 在上的值域为

C. 若在上单调递减，则

D. 若，则在定义域上单调递增

[解析]对于，由，得，则 的定义域为，故 正确.

对于，，由，可得，则,.

当 时，，则 在 上的值域为；

当 时，，，即 在 上的值域为；

当 时，，，即 在 上的值域为.

故当 时，在 上的值域为；

当 时，在 上的值域为；

当 时，在 上的值域为.故 错误.

对于，，若 在 上单调递减，则，解得，故 正确.

对于，，则当 时，在 和 上单调递增，故 错误.故选.

10. [2024·襄阳模拟]（多选题）记函数与的定义域的交集为.若存在，使得对任意，不等式恒成立，则称构成“函数对”.下列所给的两个函数能构成“函数对”的是（ AC ）.

A. ， B. ，

C. ， D. ，

[解析]由题意得，存在,,当 时，,当 时，.

对于，在 上单调递增，在 上单调递减，所以 与 在 上有交点，符合题意；

对于，满足，不符合题意；

对于，因为在 上，，在 上，，所以存在 符合题意.

对于，存在两个变号的零点，不符合题意.故选.

11. [2024·洛阳摸底]已知函数则不等式的解集为  .

[解析]根据题目所给的函数解析式，可知函数 在 上单调递减，由,得，解得.

12. （双空题）（改编）已知函数，则  （填“ ”或“ ”）；若函数在上是减函数，则实数的取值范围是  .

[解析]因为 在 上单调递减，

所以.

因为函数 的定义域为，

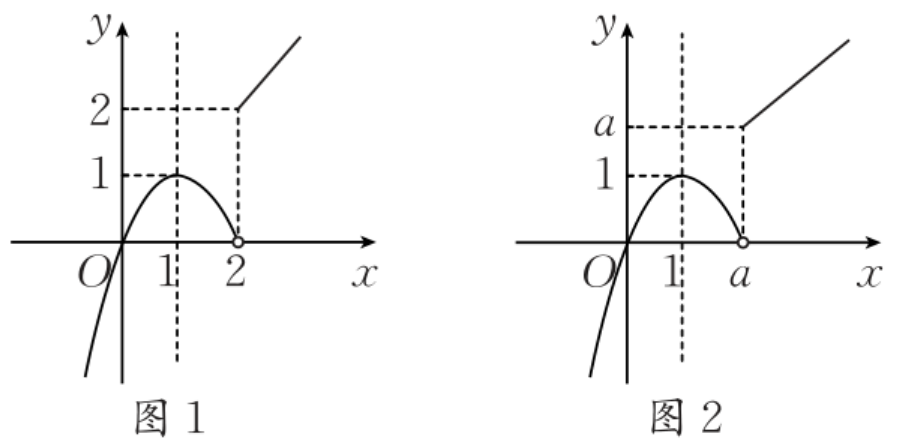
又，且函数 在 上是减函数，所以 在 上是减函数，所以 解得，即实数 的取值范围是.

#### 应用情境练

13. [2024·北京模拟]（双空题）设函数当时，的单调递增区间为,；若且，使得成立，则实数的取值范围为  .

[解析]当 时，，函数 的图象如图1所示，

由图象可得函数 的单调递增区间为 和.



若且，使得 成立，即 的图象上存在两点关于直线 对称，如图2所示，则，即实数a的取值范围为.

14. 已知函数的定义域为，若存在，使得函数在上是单调函数，且在上的值域为，则称区间为的“倍值区间”.下列函数中存在“倍值区间”的是①③.（填所有符合题意的序号）

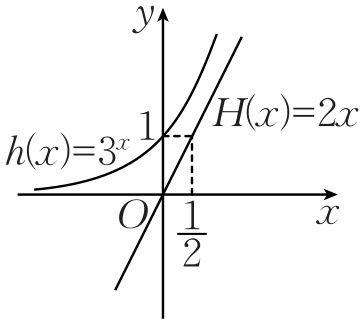
；；

；.

[解析]①函数 为增函数，若函数 存在“倍值区间”，则,解得 所以函数 存在“倍值区间”，故①存在“倍值区间”.

②函数 为增函数，若函数 存在“倍值区间”，则

作出 与 的图象如图所示，



由图可知，两函数图象无交点，即 无解，故②不存在“倍值区间”.

③当 时，；当 时，，因为对勾函数 在 上单调递减，所以函数 在 上单调递增.

若函数 在 上存在“倍值区间”，则 解得

所以函数 存在“倍值区间”，故③存在“倍值区间”.

④因为函数 所以 在 上单调递增，在 上单调递减.

若 在 上存在“倍值区间”，

则 解得，与区间 矛盾，故舍去；

若 在 上存在“倍值区间”，

则 解得，与区间 矛盾，故舍去.

故④不存在“倍值区间”.

#### 创新拓展练

15. [2024·云南模拟]（双空题）已知函数.当时，在上单调递增；当时，是减函数,当时，是增函数，则的值为1.

[解析]当 时，函数，

设，则，

因为，，，

所以，所以 在 上单调递增.

由当 时，是减函数知，设，则 恒成立，而，则 恒成立，显然，因此；

由当 时，是增函数知，设，则 恒成立，则 恒成立，显然，因此.故.

16. [2024·辽宁模拟]布劳威尔不动点定理是拓扑学里一个非常重要的不动点定理，它得名于荷兰数学家鲁伊兹·布劳威尔，简单地讲就是对于满足一定条件的连续实函数，存在一个点，使得，那么我们称该函数为“不动点函数”，而称为该函数的一个“不动点”.现新定义：若满足，则称为的“次不动点”.

（1）判断函数是否是“不动点函数”.若是，求出其“不动点”；若不是，请说明理由.

（2）已知函数，若是的“次不动点”，求实数的值.

（3）若函数在上仅有一个“不动点”和一个“次不动点”，求实数的取值范围.

[解析]（1）依题意，设为的“不动点”，则，即，解得或，

所以是“不动点函数”，不动点是2和.

（2）因为是函数的“次不动点”，依题意有，即，显然，解得.

（3）设,分别是函数 在 上的“不动点”和“次不动点”，且,唯一，

由 得，即，整理得，

令，显然函数 在 上单调递增，则，，所以.

由 得，即，整理得，

令，显然函数 在 上单调递增，则，，所以.

综上所述,实数 的取值范围为.